Chapitre 16 : Développements limités

Table des matières

1 Développements limités en un point

Idée générale : un développement limité d'une fonction f en un point a donnera de l'information sur la fonction f au voisinage du point a. On va approcher la fonction f autour de a par un polynôme.

1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.1 (développement limité à l'ordre n en a)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, avec I un intervalle non trivial, soit a un réel adhérent à I et soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

ou de manière équivalente :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

Notation : On notera souvent $\mathrm{DL}_n(a)$ pour parler d'un développement limité à l'ordre n en a.

Exemple 1.2 : La fonction cos admet un $\mathrm{DL}_2(0)$. En effet, $\cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Exemple 1.3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Remarque : La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a si, et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et les coefficients sont les mêmes. Pour trouver un $\mathrm{DL}_n(a)$, on se ramène très souvent au calcul d'un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exemple 1.4 : Déterminer un $\mathrm{DL}_1(2)$ de $x \mapsto \mathbf{e}^x$, un $\mathrm{DL}_1(3)$ de $x \mapsto \ln(x)$ et un $\mathrm{DL}_1(4)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Proposition 1.5 (troncature d'un développement limité)

Soient I un intervalle non trivial, f une fonction de I dans $\mathbb{K}$, a un réel adhérent à I, et $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$.
Alors pour tout entier $k \leqslant n$: $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_k h^k + \mathrm{o}(h^k)$.
On dit qu'on a tronqué le développement limité à un ordre inférieur.

Proposition 1.6 (unicité des coefficients d'un développement limité)

Soient I un intervalle non trivial, f une fonction de I dans $\mathbb{K}$, a un réel adhérent à I, et $n \in \mathbb{N}$.
Si f admet comme développements limités à l'ordre n en a

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n) \quad \text{et} \quad f(a+h) \underset{h \to 0}{=} b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

alors les coefficients sont égaux, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k$.

1.2 Composition à droite

Proposition 1.7 (composition à droite d'un développement limité)

Soient I et J deux intervalles non triviaux, f une fonction de I dans $\mathbb{K}$ et g une fonction de J dans I, a un réel adhérent à I et b un réel adhérent à J, et $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ et que f admet un développement limité d'ordre n en a, qui s'écrit

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

Alors

$$f(a+g(x)) \underset{x \to b}{=} a_0 + a_1 g(x) + \cdots + a_n g^n(x) + \mathrm{o}(g^n(x)).$$

Exemple 1.8 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exemple 1.9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ admet un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$.

1.3 Continuité et dérivabilité

Proposition 1.10 (lien entre développement limité à l'ordre 0 et continuité)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, avec I un intervalle non trivial, et soit $a \in I$.
La fonction f est continue en a si, et seulement si, f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$.
Dans ce cas, $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$.

Proposition 1.11 (lien entre développement limité à l'ordre 1 et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, avec I un intervalle non trivial, et soit $a \in I$.
La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.
Dans ce cas, $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$.

Remarque : Pour $n \geqslant 2$, il est faux d'affirmer que si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors f est n fois dérivable en a. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ (en effet $f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$) mais elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

1.4 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.12 (formule de Taylor-Young)

Soient I un intervalle non trivial, $n \in \mathbb{N}$, $a \in I$, f une fonction de I dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^n$.
Alors f admet un développement limité d'ordre n en a, qui est :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

ou de manière équivalente

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Remarque : Si f est polynomiale de degré $\leqslant n$, alors on a une vraie égalité (sans o). C'est la formule de Taylor polynomiale.

Exemple 1.13 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que exp, cos et sin admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exemple 1.14 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

1.5 Primitivation

Théorème 1.15 (primitivation d'un développement limité)

Soient I un intervalle non trivial, f une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$, $a \in I$, et $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en a, qui s'écrit

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

Alors toute primitive F de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en a, qui s'écrit :

$$F(a+h) \underset{h\to 0}{=} \mathbf{F(a)} + a_0 h + \frac{a_1}{2}h^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}h^{n+1} + \mathrm{o}(h^{n+1})$$

ou de manière équivalente

$$F(x) \underset{x\to a}{=} \mathbf{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}((x-a)^{n+1})$$

Démonstration.
La fonction f est continue donc elle admet des primitives. Soit F une primitive de f.
On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} G: & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & F(x) - F(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} \end{array}$$

On veut montrer que $G(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta],\ |G(x)| \leqslant \varepsilon |x-a|^{n+1}. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Remarquons tout d'abord que G est dérivable (car F l'est), et que l'on a :

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k.$$

D'après l'écriture du développement limité de f, $G'(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta],\ |G'(x)| \leqslant \varepsilon |x-a|^n. \tag{2}$$

Soit $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$. Comme G' est continue (car f est continue) et $G(a) = 0$, on a : $G(x) = \displaystyle\int_a^x G'(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si $a \leqslant x$, l'inégalité triangulaire pour les intégrales donne :

$$|G(x)| = \left|\int_a^x G'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |G'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

  Or pour tout $t \in [a,x]$, $t \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, donc d'après (2) : $|G'(t)| \leqslant \varepsilon (t-a)^n \leqslant \varepsilon (x-a)^n$. On en déduit :

$$|G(x)| \leqslant \int_a^x \varepsilon (x-a)^n\,\mathrm{d}t = \varepsilon (x-a)^n (x-a) = \varepsilon (x-a)^{n+1} = \varepsilon |x-a|^{n+1}.$$

- De même, si $x < a$, on obtient, en inversant les bornes dans l'intégrale :

$$|G(x)| = \left|\int_x^a G'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^a \underbrace{|G'(t)|}_{\leqslant \varepsilon(a-t)^n \leqslant \varepsilon(a-x)^n} \mathrm{d}t \leqslant \int_x^a \varepsilon(a-x)^n\,\mathrm{d}t = \varepsilon(a-x)^{n+1} = \varepsilon|x-a|^{n+1}.$$

Dans tous les cas, $|G(x)| \leqslant \varepsilon|x-a|^{n+1}$. Nous avons ainsi montré l'affirmation (1), ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque : On peut donc intégrer les $\mathrm{DL}_n(a)$ en n'oubliant pas **la constante d'intégration**.

Exemple 1.16 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exemple 1.17 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Arctan admet un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$.

Attention : On ne peut pas en général dériver un développement limité. Exemple : la fonction f définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ ($f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$) mais f' n'admet pas de limite en 0 donc f' n'admet pas de $\mathrm{DL}_0(0)$, en particulier f' n'admet pas de $\mathrm{DL}_1(0)$.

1.6 Opérations élémentaires

1.6.1 Combinaison linéaire

Lorsqu'on fait une combinaison linéaire d'un développement limité à l'ordre n et d'un développement limité à l'ordre m, on obtient un développement limité à l'ordre $\min(n,m)$ (on garde le « o » qui est le moins précis des deux).

Exemple 1.18 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ch admet un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ et que sh admet un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$.

1.6.2 Produit

Si on a deux développements limités au même ordre n :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + \mathrm{o}(h^n) \qquad \text{et} \qquad g(a+h) \underset{h\to 0}{=} Q(h) + \mathrm{o}(h^n)$$

(avec P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$), alors

$$f(a+h) \times g(a+h) \underset{h\to 0}{=} R(h) + \mathrm{o}(h^n)$$

où R est le polynôme PQ que l'on a tronqué à l'ordre n (R est le reste de la division de PQ par X^{n+1}).

Exemple 1.19 : Soit $f : x \mapsto (\cos(x))^2$. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

Remarque : Si au moins l'un des deux développements limités a un terme constant nul, on n'a en fait pas besoin d'un développement limité d'ordre n de chaque facteur pour obtenir un développement limité d'ordre n du produit. On peut prévoir l'ordre nécessaire pour chaque facteur en factorisation par le terme prépondérant : si

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_k h^k + \mathrm{o}(h^k)\right) \qquad \text{et} \qquad g(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^q\left(b_0 + b_1 h + \cdots + b_k h^k + \mathrm{o}(h^k)\right)$$

alors le développement limité obtenu par produit sera d'ordre $p+q+k$.
Pour avoir un développement limité à l'ordre n, il suffit donc de développer f à l'ordre $n-q$ et g à l'ordre $n-p$.

Exemple 1.20 : Soit $f : x \mapsto (\cos(x)-1)(\sin(x)-x)$. Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de f.

1.6.3 Quotient

On se ramène à $\dfrac{1}{1 \pm g(x)}$ avec $g(x) \to 0$.

Exemple 1.21 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{2+x^2}{3+x}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f.

Exemple 1.22 : Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et en déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan.

1.7 Parité

Proposition 1.23 (lien entre développement limité et parité)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si f est paire et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors il ne contient que des coefficients d'indice pair.
2. Si f est impaire et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors il ne contient que des coefficients d'indice impair.

Exemple 1.24 : Retrouver le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tan à l'aide de $\tan' = 1 + \tan^2$.

2 Applications des développements limités

2.1 Détermination d'équivalents et de limites

Proposition 2.1 (une fonction est équivalente au premier terme non nul de son développement limité)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, avec I un intervalle non trivial, soit a un réel adhérent à I et soit $n \in \mathbb{N}$.
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont les coefficients sont non tous nuls alors f est équivalente en a au premier terme **non nul** de son $\mathrm{DL}_n(a)$.
En d'autres termes, si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui s'écrit

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_p h^p + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n) \quad \text{i.e.} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

où $p \in [\![0;n]\!]$ et $a_p \neq 0$. Alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$ i.e. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

Remarque : On ne peut pas additionner des équivalents. En revanche, on peut additionner des développements limités. Les développements limités sont donc des outils plus puissants pour déterminer des limites.

Exemple 2.2 : Déterminer, si elle existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - x - 1}{x^2}$.

2.2 Extrema locaux et position relative par rapport aux tangentes

Définition 2.3 (maximum, minimum et extremum local)

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overset{o}{I}$.
On dit que f admet un <u>maximum local</u> en a lorsque $\exists \eta > 0, \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I, f(x) \leqslant f(a)$.
On dit que f admet un <u>minimum local</u> en a lorsque $\exists \eta > 0, \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I, f(a) \leqslant f(x)$.
On dit que f admet un <u>extremum local</u> en a lorsque f admet un maximum ou minimum local en a.

Théorème 2.4 (extremum et développement limité)

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overset{o}{I}$.
Supposons que f admette un développement limité en a de la forme :

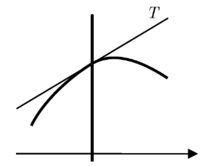
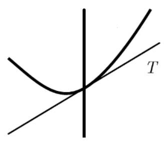
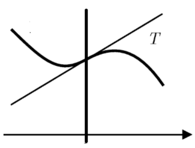
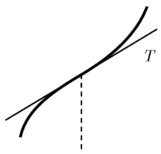
$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_p\,(x-a)^p + \mathrm{o}((x-a)^p) \qquad \text{avec } p \geq 1 \text{ et } a_p \neq 0$$

La fonction f admet un extremum local en a si, et seulement si p est pair.

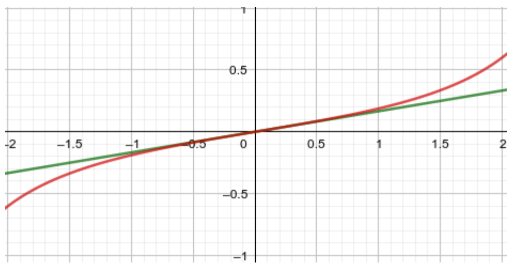
Plus généralement, lorsque f admet un développement de la forme : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+a_p(x-a)^p+\mathrm{o}((x-a)^p)$ avec $p \geq 2$ et $a_p \neq 0$, on connaît le signe de $\Delta(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x-a))$ au voisinage de a :

	$a_p < 0$	$a_p > 0$
p pair	x : a ; $\Delta(x)$: $-$ 0 $-$	x : a ; $\Delta(x)$: $+$ 0 $+$
p impair	x : a ; $\Delta(x)$: $+$ 0 $-$	x : a ; $\Delta(x)$: $-$ 0 $+$

On en déduit l'allure du graphe de f au voisinage du point d'abscisse a :

	$a_p < 0$	$a_p > 0$
p pair		
p impair		

Exemple 2.5 :
Étude au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.



Corollaire 2.6 (condition nécessaire pour un extremum local)

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overset{o}{I}$.
On suppose que f admet un développement limité d'ordre 1 en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}((x-a))$$

Si f admet un extremum local en a, alors $a_1 = 0$.

Remarque : De manière équivalente, si f est dérivable en a qui est un point intérieur de I, et si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$ (a est un point critique de f).

Corollaire 2.7 (condition suffisante pour un extremum local)

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overset{o}{I}$.
On suppose que f admet un développement limité d'ordre 2 en a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \mathrm{o}((x-a)^2)$$

Si $a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$, alors f admet un extremum local en a.
Il s'agit d'un minimum si $a_2 > 0$, d'un maximum si $a_2 < 0$.

Remarque : On suppose de plus f est de classe $\mathscr{C}^2$, de telle sorte que la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a soit valable.

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.

Exemple 2.8 : Déterminer les extrema locaux de ch.

3 Développements asymptotiques

3.1 Définition et premiers exemples

Définition 3.1 (développement asymptotique à n termes en a)

Soient I un intervalle non trivial, f une fonction de I dans $\mathbb{K}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I, et $n \in \mathbb{N}$.
Un développement asymptotique de f à n termes en a est la donnée de n fonctions $g_1, g_2, \cdots, g_n$ telles que

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{=} g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) + \mathrm{o}(g_n(x)) \\ g_2(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g_1(x)), \quad g_3(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g_2(x)) \quad \cdots \quad g_n(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g_{n-1}(x)) \end{cases}$$

On a une définition similaire pour un développement asymptotique d'une suite (en $+\infty$).

Méthodes pour obtenir un développement asymptotique :

1. se ramener à un développement limité (lorsque c'est possible).
2. chercher d'abord un équivalent $f \sim g$, puis un équivalent de la différence $f - g$, et ainsi de suite.

Exemple 3.2 : Donner un développement asymptotique de $x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$ à 4 termes en 0.

Exemple 3.3 : Donner un développement asymptotique à 3 termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n\ln(n+1)$.

Définition 3.4 (asymptote affine)

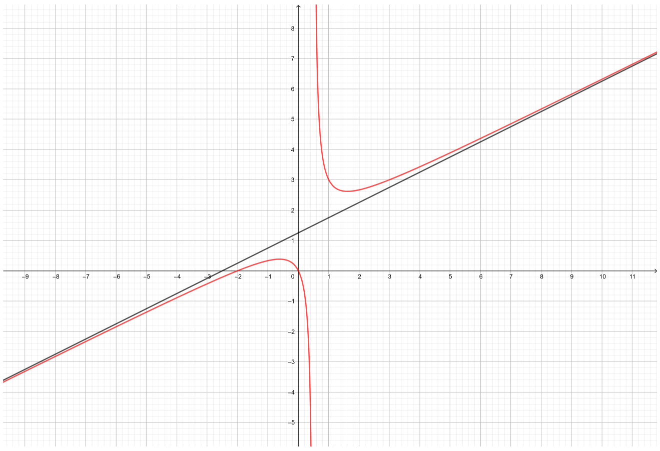
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, avec $D_f \in \mathbb{R}$. Soient a et $b \in \mathbb{R}$.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote affine en $+\infty$ à la courbe représentative de f si on a le développement asymptotique suivant de f en $+\infty$:

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} ax + b + \mathrm{o}(1)$$

Remarques :

- On a une définition similaire pour une asymptote affine en $-\infty$.
- L'étude du signe de la quantité $\mathrm{o}(1)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple 3.5 : Étude des branches infinies de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{2x-1}$.



3.2 Exemples courants

Fonctions réciproques

Exemple 3.6 : Soit $f : x \mapsto x+x^5$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer le développement asymptotique à deux termes en $+\infty$ de f^{-1}.

Équations à paramètre

Exemple 3.7 : Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons l'équation $(E_n) : \ln(x) + x = n$ d'inconnue réelle x.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que (x_n) a une limite que l'on calculera.
3. Déterminer le développement asymptotique de (x_n) à la précision $\frac{\ln n}{n}$.

Suites récurrentes

Exemple 3.8 : On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Suites d'intégrales

Exemple 3.9 : Soit $f \in \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4 Formulaire des développements limités usuels

$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=}$	....
$\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=}$	....
$\mathbf{e}^x \underset{x\to 0}{=}$	....
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=}$	....
$\cos(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\sin(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=}$	....